ДРУГИ ПОПРАВНИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА

Део први

16. септембар 2015

Професор: Игор Долинка — Асистент: Бојан Башић

1. Посматрајмо број

$$122333\ldots\underbrace{99\ldots9}_{9\text{ пута}}\underbrace{1010\ldots10}_{10\text{ пута}}\ldots\underbrace{2020\ldots20}_{20\text{ пута}}$$

(дакле, посматрани број добијен је надовезивањем броја 1 записаног једном, броја 2 записаног два пута, броја 3 записаног три пута итд. до броја 20 записаног двадесет пута). Испитати да ли је посматрани број:

a) дељив са 9;
b) дељив са 11;
c) потпун квадрат;
d) дељив са 16.

2. Доказати да за све просте бројеве $p > 2$ важи

$$(p-3)! \equiv \frac{p-1}{2} \pmod{p}.$$

Једна идеја: Најпре уочити конгруенцију $-2(p-3)! \equiv 1 \pmod{p}$.

3. У скупу ненегативних целих бројева решити једначину

$$(2^{2015}+1)^x + 2^{2015} = 2^y + 1.$$

Једна идеја: Испробати могућности $x \in \{0,1\}$, па надаље претпоставити $x \geqslant 2$. Утврдити да је тада по модулу 2^{2019} десна страна конгруентна са 1 а лева са $(x+1)2^{2015}+1$, па одатле закључити каквог x мора бити облика. Затим добити контрадикцију посматрањем једначине по новом модулу, одабраном тако да лева страна једначине буде конгруентна с константом кад год је x добијеног облика.

ДРУГИ ПОПРАВНИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА

Део други

16. септембар 2015

Професор: Игор Долинка — Асистент: Бојан Башић

1. Испитати да ли је број 2015 примитиван корен по модулу $2 \cdot 31^{32^{33}}$.

2. Доказати да се сваки цео број може приказати као збир кубова пет целих бројева (не обавезно различитих).

Једна идеја: Имати у виду идентитет

$$(m+1)^3 + (m-1)^3 - 2m^3 = 6m.$$

Представљање задатог целог броја n на тражени начин може се добити из горњег идентитета уврштавањем $m = \frac{n^3-n}{6}$.

3. Доказати да се, за сваки природан број n, бројеви $\{1,2,3,\ldots,2n\}$ могу поделити на n дисјунктних парова таквих да је сума бројева у сваком пару прост број.

Једна идеја: Радити тоталном индукцијом. Подела бројева $\{1,2,3,\ldots,2n\}$ на тражени начин може се спровести проналажењем непарног броја k таквог да се бројеви из скупа $\{k,k+1,\ldots,2n\}$ могу поделити на дисјунктне парове такве да сума бројева у сваком пару даје увек исти прост број, а бројеви $\{1,2,\ldots,k-1\}$ могу се потом поделити према индуктивној хипотези.